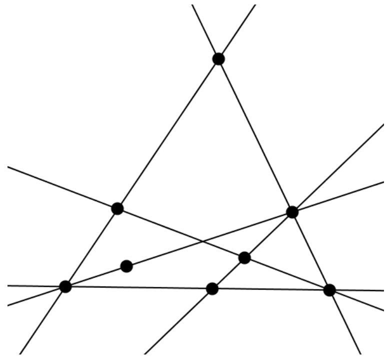
Olympiades de mathématiques 2014

ZONE EUROPE – AFRIQUE – ASIE

EXERCICE NATIONAL 1 : FIGURES ÉQUILIBRÉES (d'après une proposition de l'académie de Dijon)

La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites) et de points marqués (ici, 8 points).
Elle possède la propriété suivante :
Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.

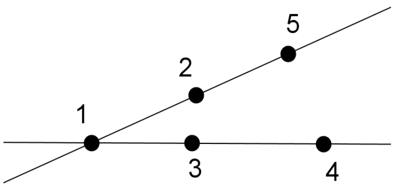
Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***.



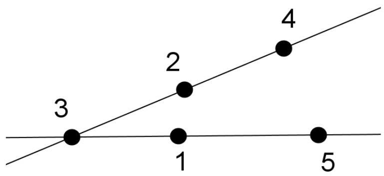
1. Construire une figure équilibrée constituée :
   a) de 7 points marqués et 5 droites ;
   b) de 9 points marqués et 8 droites.

Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p.
Cette numérotation est alors dite ***magique*** s'il existe un entier K, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K. Cet entier K est appelé ***constante magique*** de la numérotation.

2. Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



$K = 8$

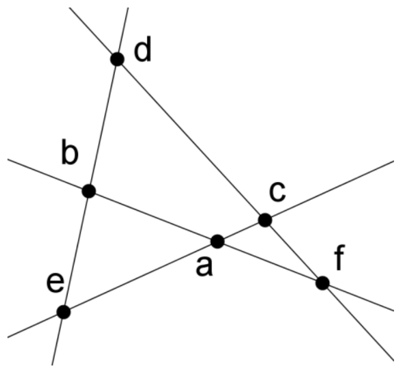


$K = 9$

Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.
Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.

3. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés a, b, c, d, e, f sur la figure.

   a) Démontrer que si la figure est magique, de constante magique K, alors $4 \times K = 42$.
   b) Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?
   Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.

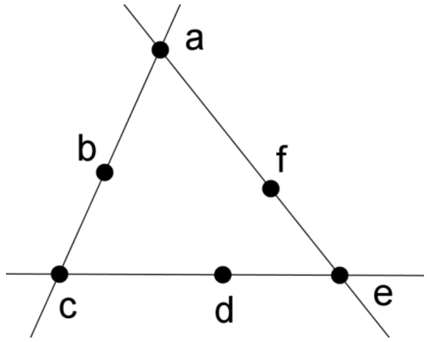


4. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 3 droites. Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau a, b, c, d, e, f sur la figure.

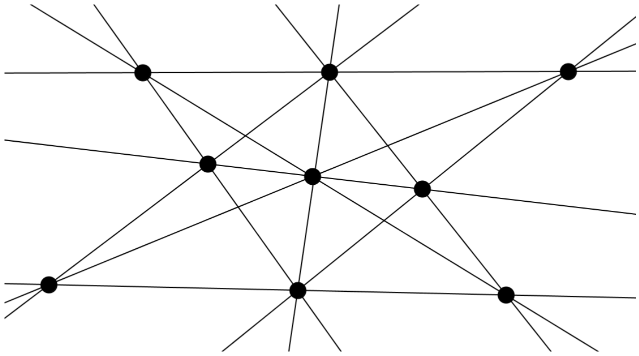
a) Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.

b) Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors $a + c + e = 3(K - 7)$.

c) Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure.



5. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.
Cette figure admet-elle une numérotation magique ?



EXERCICE NATIONAL 2 : LE PLUS COURT POSSIBLE (d'après une proposition de l'académie de Montpellier)

Quatre villes (Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon) sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100km. La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A

« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n°1.
« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.
« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

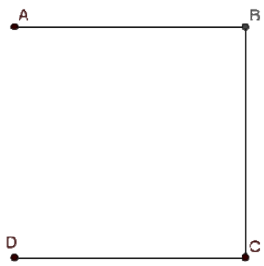


fig. 1
Assistant n°1

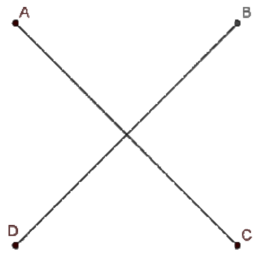


fig. 2
Assistant n°2

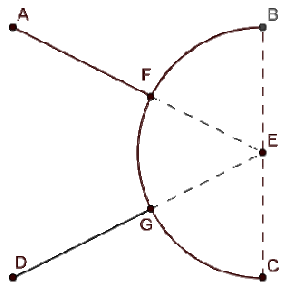


fig. 3
Assistant n°3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?

2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :
« On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

Si EF = 20 km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

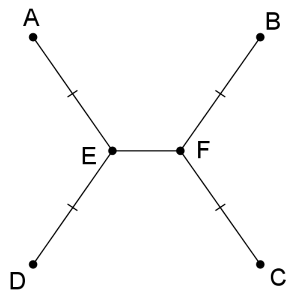


fig. 4

Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

Rappels de géométrie :

Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :

on a toujours $AB + BC \geq AC$;

on a l'égalité $AB + BC = AC$ si, et seulement si, B appartient au segment [AC].

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment [AB] (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.

On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100km de coté, comme dans le dessin suivant.

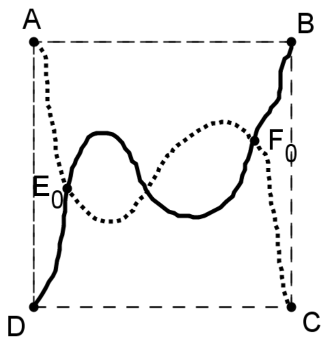


fig. 5

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.

En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (*fig. 5*).

Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*).

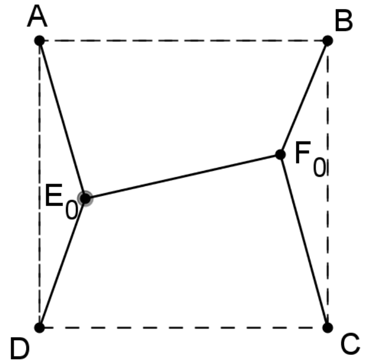


fig. 6

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

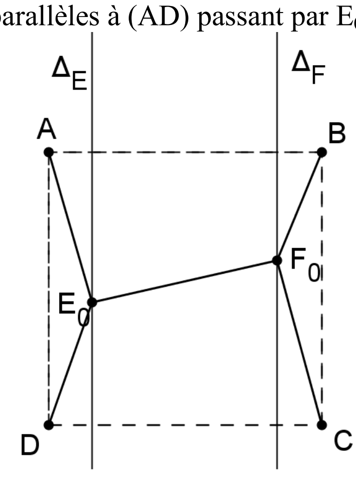


fig. 7

a. Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances DE + EA soit minimale.
On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.

b. Montrer que $EF \leq E_0F_0$.

c. Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment [AD] (*fig. 8*).

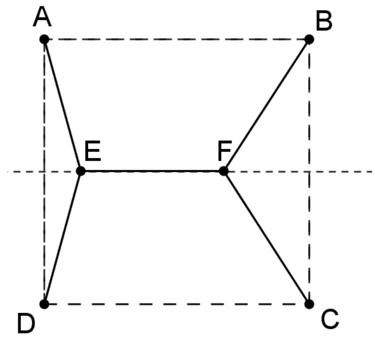


fig. 8

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de [AB].

a. Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de [AB].

b. D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (*fig. 4*).
Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

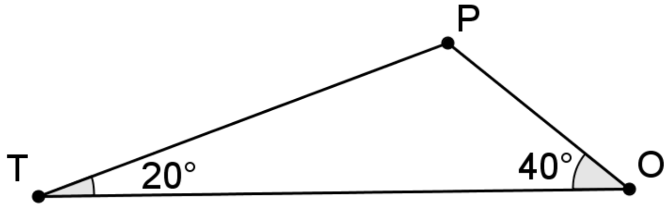
c. Quelle est alors la valeur de l'angle DEA ?

ZONE AMÉRIQUES - CARAÏBES

EXERCICE NATIONAL 1 : LES TRIANGLES TOP (d'après une proposition de l'académie de Bordeaux)

Un triangle est dit TOP si on peut le partager en deux triangles isocèles en traçant un segment joignant un de ses sommets à un point du côté opposé.

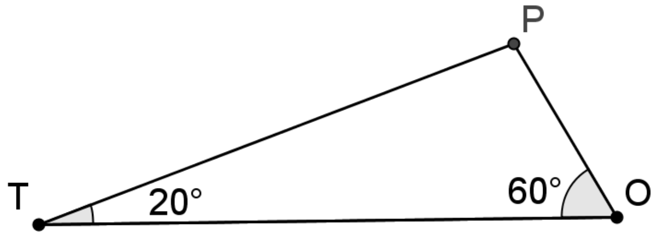
1. Montrer que tout triangle rectangle est un triangle TOP.
2.
   a. Montrer que le triangle ci-dessous est un triangle TOP.



   b. En est-il de même pour un triangle ayant deux angles de mesures α et β tels que :

$$0 < \alpha < 45 \text{ et } \beta = 2\alpha \text{ ?}$$

3.
   a. Montrer que le triangle ci-dessous est un triangle TOP.



   b. En est-il de même pour tout triangle ayant deux angles de mesure α et β tels que :

$$0 < \alpha < 45 \text{ et } \beta = 3\alpha \text{ ?}$$

4. On s'intéresse aux angles des triangles TOP dont un des angles mesure 24°. On note $(24, a, b)$ avec $a \leq b$, les triplets de 3 angles associés.
   a. Donner, en utilisant les questions précédentes, une liste de 7 possibilités pour les trois angles de tels triangles.
   b. Tous les triplets d'angles obtenus à la question précédente définissent-ils des triangles TOP ?
   c. Y a-t-il d'autres possibilités de triangles TOP avec un des angles égal à 24°?

EXERCICE NATIONAL 2 : PRODUIT MAXIMAL (d'après une proposition de l'académie de Limoges)

Soit S un nombre réel **strictement positif**.
Une ***partition de S*** est une liste (sans ordre) de nombres **strictement positifs** dont la somme vaut S. Les partitions seront notées entre deux crochets : par exemple,

$$E = \langle 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 \rangle , F = \langle 4 ; 4 \rangle , G = \langle 8 \rangle , H = \langle 2 ; 2{,}5 ; 3{,}5 \rangle$$

sont des partitions de 8 car $1 + 1 + 1 + 2 + 3 = 8$; $4 + 4 = 8$ et $2 + 2{,}5 + 3{,}5 = 8$.

L'ordre des nombres n'a pas d'importance : la partition $\langle 1 ; 3 ; 2 ; 1 ; 1 \rangle$ est la même que la partition E.
Pour une partition E, on note $p(E)$ le produit des nombres de la liste. On l'appelle ***le produit de la partition* E**.

Avec les exemples précédents, on a :

$p(E) = 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 3 = 6$; $p(F) = 4 \times 4 = 16$; $p(G) = 8$; $p(H) = 2 \times 2{,}5 \times 3{,}5 = 17{,}5$

Le but de l'exercice est de déterminer des partitions pour lesquelles le produit est maximal.

Partie 1 - Partitions entières

Soit S un nombre entier naturel. On dit qu'une partition de S est ***entière*** si elle ne contient que des nombres entiers. (Dans l'introduction, les partitions E, F et G sont entières, la partition H ne l'est pas).
Soit E une partition entière de S. On dit que ***E est maximale*** si pour toute autre partition entière F de S, on a $p(F) \leq p(E)$.

1. Dans cette question, $S = 5$. Donner les sept partitions entières de 5.
Pour chacune d'elle, calculer son produit.
Quelle est l'unique partition entière maximale de 5 ?

2. Dans la suite, S est un entier supérieur ou égal à 2 et E une partition entière de S.

a. Dans chacun des cas suivants, justifier que E n'est pas une partition entière maximale.
- E est une partition contenant au moins une fois le nombre 6 : $E = \langle 6 ; \ldots \rangle$.
- E est une partition contenant au moins deux fois le nombre 4 : $E = \langle 4 ; 4 ; \ldots \rangle$.
- E est une partition contenant au moins trois fois le nombre 2 : $E = \langle 2 ; 2 ; 2 ; \ldots \rangle$.
- E une partition contenant au moins une fois le nombre 4 et le nombre 2 : $E = \langle 4 ; 2 ; \ldots \rangle$.
- E une partition contenant au moins une fois le nombre 1 : $E = \langle 1 ; \ldots \rangle$.

b. Montrer que si E est une partition contenant un entier a supérieur ou égal à 5 alors E n'est pas une partition entière maximale.

3. En utilisant la question précédente,
- donner l'unique partition entière maximale de 20 et son produit,
- donner les deux partitions entières maximales de 40 et leur produit.

Partie 2 - Partitions réelles

Dans cette partie, S est un nombre réel supérieur à 1, et les partitions ne contiennent plus forcément que des nombres entiers.
Soit E une partition de S. On dit que E est une ***partition record*** si pour toute autre partition F on a $p(F) \leq p(E)$.

1. Proposer une partition de 5 dont le produit est strictement supérieur à 6.

2. Montrer que si a et b sont deux nombres réels tels que $a \neq b$ alors $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab$.
En déduire que si une partition E contient deux réels distincts a et b alors E n'est pas une partition record.

3. Une partition record de S est donc formée de la répétition de n fois un même nombre a.
Dans la suite, on note E_n la partition de S :

$$E_n = \langle a ; a ; \ldots ; a ; a \rangle \text{ avec } n \text{ répétitions du nombre } a.$$

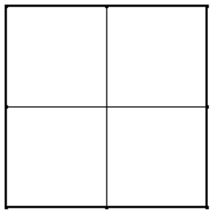
Exprimer $p(E_n)$ en fonction de S et de n.

4. À l'aide de la calculatrice,
- déterminer la partition record de 20 et son produit (arrondi au dixième) ;
- déterminer la partition record de 40 et son produit (arrondi au dixième).

ZONE PACIFIQUE

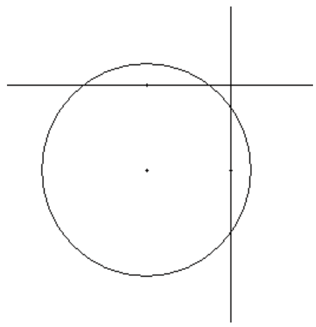
EXERCICE NATIONAL 1 : LE DAMIER (d’après une proposition de l’académie de Caen)

On considère un plateau de jeu de 2×2 cases carrées, dont chacune a pour côté 10 cm.
Ce damier, qu’on assimilera au carré de 20 cm de côté, est entouré d’un bord haut.



On lance sur ce plateau un jeton ayant la forme d’un disque de rayon 1cm. Ce jeton retombe à plat, et ne sort pas du plateau grâce au bord de celui-ci.

1. Reproduire le damier sur la copie (on prendra une échelle de 1/2). Représenter l’ensemble des positions possibles du centre du jeton par rapport au plateau de jeu.
   On admettra dans la suite du problème que l’ensemble de ces positions est équiprobable.
2.
   a. Représenter sur une autre figure l’ensemble des positions possibles du centre du jeton pour que celui-ci ne touche aucune ligne du plateau de jeu.
   b. Quelle est la probabilité que le jeton ne touche aucune ligne du plateau de jeu ?
3. Quelle est la probabilité que le jeton recouvre le point d’intersection du quadrillage ?
4. Quelle est la probabilité qu’il soit sur deux cases exactement ?
5. Quelle est la probabilité qu’il soit sur trois cases exactement (comme sur la figure ci-dessous) ?



6. Quel devrait être le rayon du jeton pour que la probabilité qu’il touche au moins une ligne du plateau soit :
   a. égale à 1 ?
   b. égale à $\frac{1}{2}$?

EXERCICE NATIONAL 3 : TRIANGLE ALIMENTAIRE (d’après une proposition de l’académie de Nantes)

D'après " le trésor de Tonton Lulu " de Jacques Lubczanski et Géraud Chaumel.

Sur la carte des aliments, un aliment est représenté par un point ayant trois coordonnées (x ; y ; z).
x représente le pourcentage de glucides de l'aliment, y représente celui des protides et z celui des lipides.

Toutes ces données sont exprimées en pourcentage des masses.
Les axes sont orientés comme indiqué sur la *figure 1* ci-dessous et on trace les parallèles aux axes pour lire les coordonnées.
Sur la *figure 1* ci-dessous, on a placé le point E représentant les épinards. On lit alors que E a pour coordonnées (55 ; 40 ; 5).

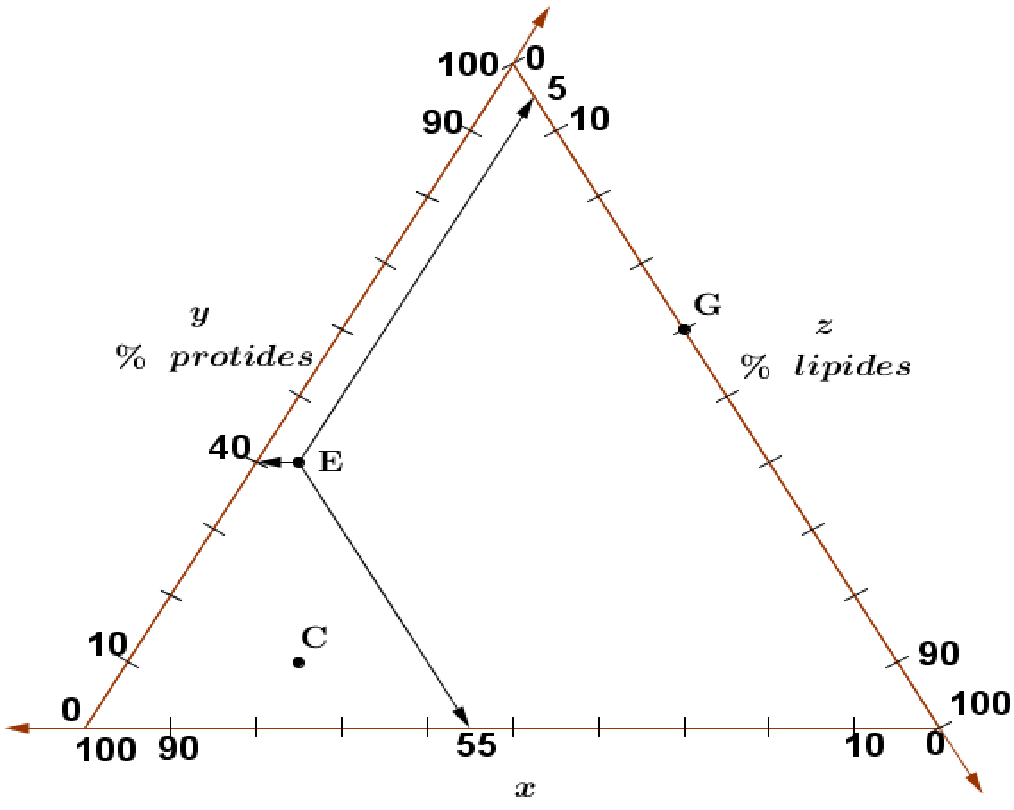


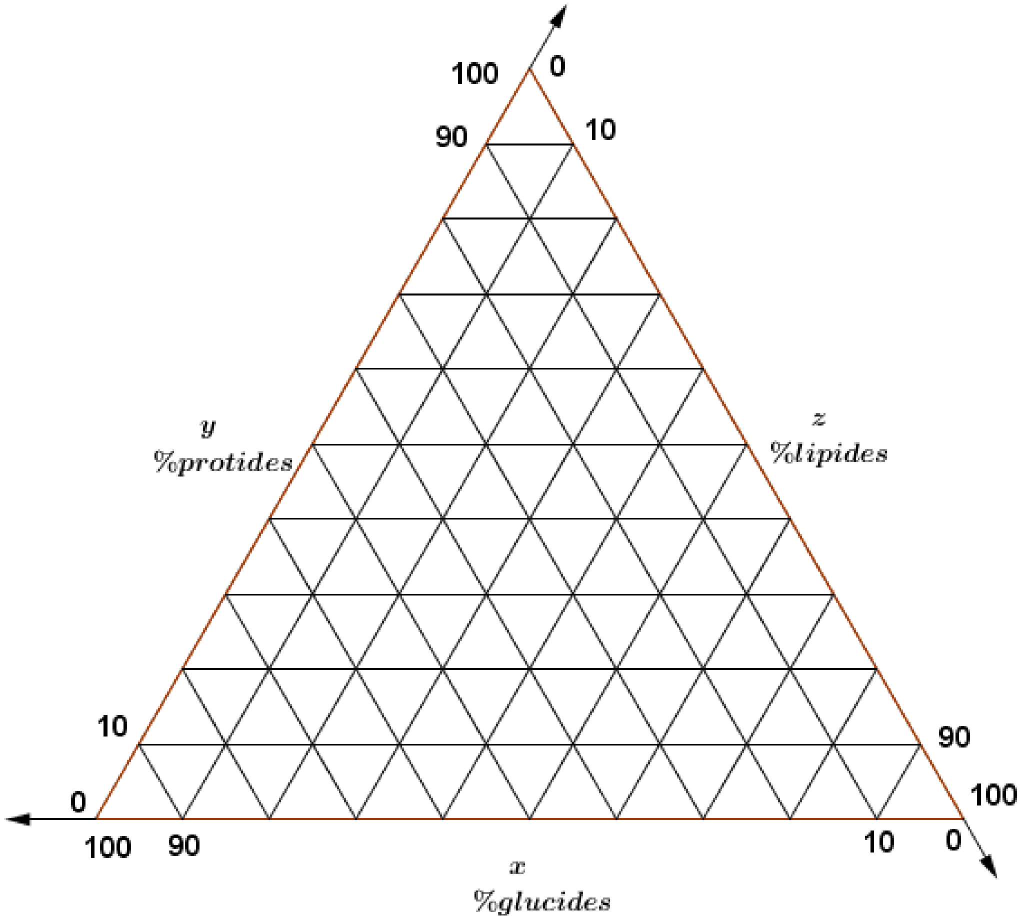
figure 1

1. Les points C et G sont indiqués sur la *figure 1*. Donner les coordonnées du point C représentant le chocolat et du point G représentant le fromage.

2. Placer sur l'annexe à rendre avec la copie le point A représentant l'amande, composée de 20 % de glucides, 30 % de protides, 50 % de lipides.

3. Hachurer en rouge sur l'annexe la zone où se trouvent les points représentant les aliments avec plus de protides que de glucides en pourcentage. Aucune justification n'est demandée.
4. Selon les diététiciens, les proportions en glucides, protides et lipides les mieux adaptées à l'Homme vérifient le système $\begin{cases} 50 \leq x \leq 60 \\ 10 \leq y \leq 20 \\ 25 \leq z \leq 35 \end{cases}$ qui définit ainsi une "zone idéale" sur la carte.
   a. Tracer en vert le contour de l'hexagone régulier représentant la zone idéale et vérifier que son centre Z a pour coordonnées (55 ; 15 ; 30).
   b. On place un point au hasard sur la carte des aliments. Quelle est la probabilité que ce point soit dans la zone idéale ?

5. La recette du "quatre-quarts" est composée de farine, beurre, sucre et œuf en masses identiques.
   Par exemple, pour préparer 100 grammes de "quatre-quarts", il faut 25 grammes de chaque ingrédient.
   a. Placer sur l'annexe le point F représentant la farine (85 % de glucides, 15 % de protides), le point S représentant le sucre (100 % de glucides), le point B représentant le beurre (100 % de lipides) et le point O représentant l'œuf (40 % de protides et 60 % de lipides).
   b. Trouver les coordonnées du point Q représentant le quatre-quarts et placer ce point sur l'annexe.
   c. Le point Q n'étant pas dans la zone idéale, modifier les parts de farine et d'œuf, tout en gardant 25 % de sucre et 25 % de beurre, pour que Q soit dans la zone idéale.



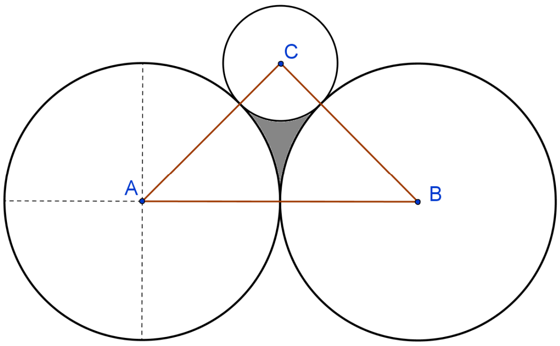
Déterminer alors toutes les proportions de farine et d'œuf qui conviennent.

figure 2 (*Vous pouvez utiliser cette figure pour vos essais*)

NOUVELLE CALÉDONIE

Exercice 1 : Les cibles

1. ABC est un triangle isocèle rectangle en C. Les cercles $C_{A,}$ C_B et C_C, centrés respectivement en A, B et C sont tangents deux à deux, les cercles et étant de rayon 4 cm.

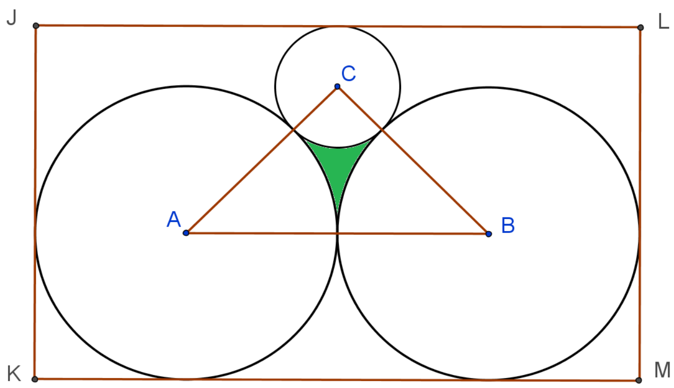


La figure n'est pas en vraie grandeur.

   a. Donner les valeurs exactes de chacun des côtés du triangle ABC.
   b. En déduire le rayon du cercle C_C.
   c. Après avoir calculé l'aire du triangle ABC, déterminer l'aire de la partie grisée.

Aide : *On pourra utiliser la formule donnant l'aire d'un secteur angulaire* $A = \dfrac{\alpha \times \pi \times r^2}{360}$ *où α est l'angle en degrés du secteur angulaire et r son rayon.*

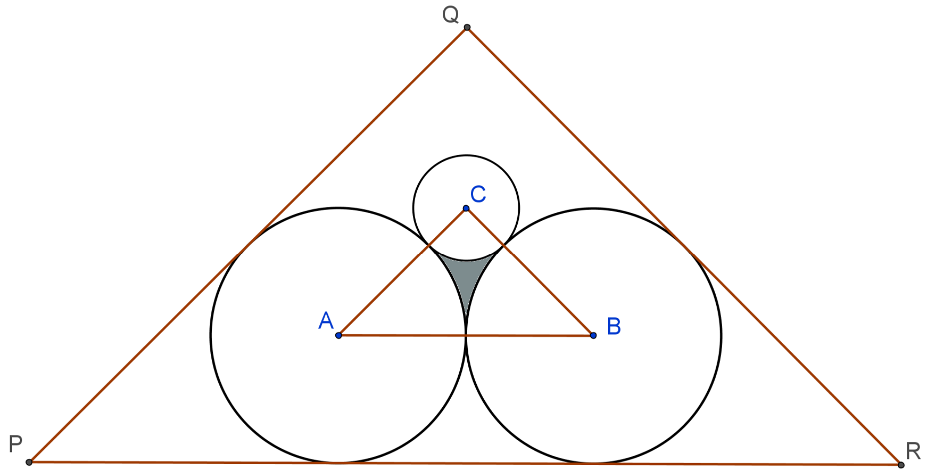
2. À partir de la figure de la question 1, on construit le rectangle JKML de la façon suivante :
   - (KM) parallèle à (AB) et tangente à C_A et C_B ;
   - (JK) est tangente à C_A;
   - (JL) est tangente à C_C ;
   - (LM) est tangente à C_B ;
   - les trois cercles sont à l'intérieur du rectangle.



La figure n'est pas en vraie grandeur.

Déterminer la mesure de chacun des côtés du rectangle JKML.

3. À partir de la figure de la question 1, on construit le triangle PQR isocèle rectangle en Q de la façon suivante :
   - (PR) parallèle à (AB) et tangente à C_A et C_B ;
   - (PQ) parallèle à (AC) et tangente à C_A ;
   - (QR) parallèle à (CB) et tangente à C_B.



La figure n'est pas en vraie grandeur.

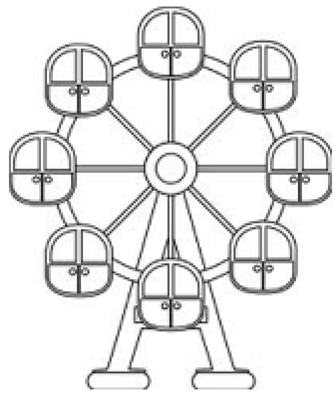
Déterminer la mesure de chacun des côtés du triangle PQR.

4. On définit ainsi deux cibles : l'une étant celle de la question 2 et l'autre celle de la question 3. On lance une fléchette, on gagne si elle tombe dans la partie grisée.
   On suppose que la fléchette atteint toujours la cible.
   Olympe affirme : « *J'ai plus de chance de gagner avec la cible rectangulaire* ».
   Que pensez-vous de l'affirmation d'Olympe ?

Exercice 2 : Le parc d'attraction

Un très grand parc installe des liaisons par navettes pour relier un certain nombre d'attractions du domaine.
Soit n un entier naturel.

Le comité de gestion du domaine doit choisir n points (correspondant à des attractions) de telle sorte que



- chacun des n points est en liaison directe par une navette avec au plus trois autres points ;
- pour se rendre d'un des points choisis à un autre on emprunte au plus deux navettes successives.

1. Expliquer pourquoi le comité peut choisir au plus 10 points dans ce domaine.
2. Construire un réseau avec 10 points satisfaisant aux conditions imposées.