MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Polynésie française

Mercredi 18 mars de 7 heures à 11 heures

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

Durée de la composition : 4 heures

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de … heures après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

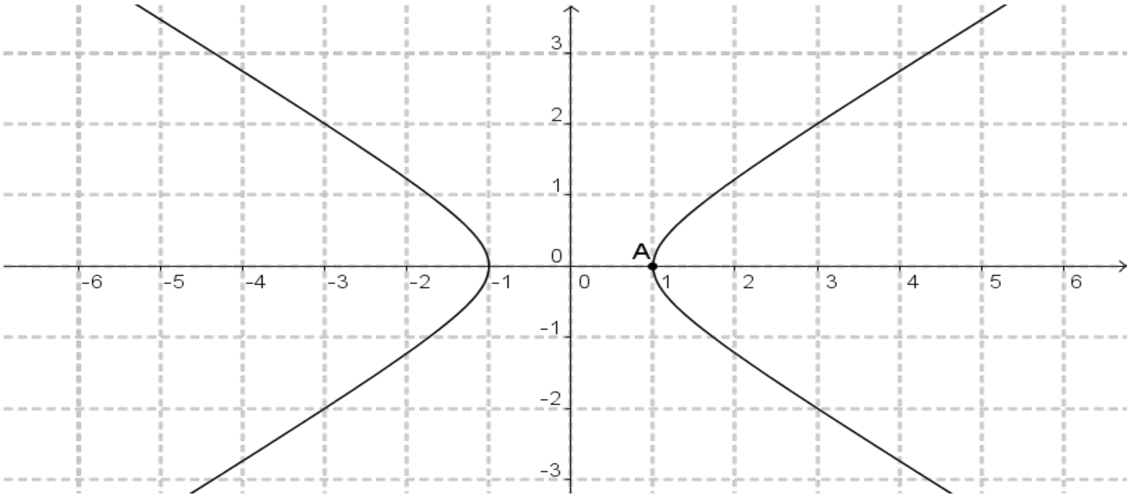
Exercice numéro 1

(proposé par le jury national)

Délicieux mais … équilibré ?

PARTIE A

Ci-dessous est représenté dans un repère l'ensemble des points dont le couple (x, y) de coordonnées vérifie la relation $x^2 - 2y^2 = 1$. On s'intéresse plus particulièrement aux points de cette courbe dont les coordonnées sont des entiers comme par exemple le point A dont le couple de coordonnées est $(1, 0)$.



1. Donner cinq autres couples d'entiers (x, y) tels que $x^2 - 2y^2 = 1$.

2. Soit a et b des entiers naturels. On pose $A = a + 2b$ et $B = a + b$.

Exprimer $A^2 - 2B^2$ en fonction de $a^2 - 2b^2$.

Donner un nouveau couple d'entiers (x, y) solution de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ tel que $x > 10$

3. Rédiger un algorithme affichant le premier couple d'entiers (x, y) solution de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ et tel que $x > 2\,015$. Quel est le couple obtenu ?

PARTIE B

On rappelle l'égalité valable pour tout entier naturel non nul n : $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. On dit qu'un entier naturel n strictement supérieur à 3 est *délicieux* s'il existe un entier k compris entre 1 et n tel que :

$$1 + 2 + \ldots + (k-1) = (k+1) + (k+2) + \ldots + n.$$

a. Trouver le plus petit entier *délicieux* (on pourra remarquer que $n^2 + n = \frac{(2n+1)^2 - 1}{4}$).

b. Trouver un entier *délicieux* supérieur à 1007.

2. On dit qu'un entier naturel n est *équilibré* s'il existe un entier p compris entre 1 et n tel que :

$$1 + 2 + \ldots + p = (p+1) + (p+2) + \ldots + n.$$

a. Trouver le plus petit entier *équilibré*.

b. Trouver un entier *équilibré* supérieur à 1007.

3. Existe-t-il des entiers à la fois *délicieux* et *équilibrés* ?

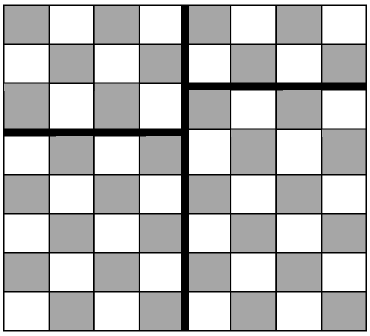
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Exercice numéro 2

(proposé par le jury national)

Découpage d'un échiquier

On dispose d'un échiquier standard 8 x 8 dont les cases (chacune représente une unité d'aire) sont, sur chaque ligne et chaque colonne, alternativement noires et blanches.
On désire partager cet échiquier en rectangles, chacun composé d'un certain nombre de cases en respectant de plus les deux contraintes suivantes : chaque rectangle doit comporter autant de cases blanches que de cases noires et les aires de tous les rectangles doivent être différentes.
L'exemple ci-dessous montre un tel découpage avec quatre rectangles.



Le but est de déterminer la valeur maximale du nombre de rectangles que l'on peut ainsi construire et de préciser dans chaque cas rencontré un partage possible.

1. Proposer un exemple de découpage avec 5 rectangles, respectant ces contraintes.

On note n le nombre de rectangles d'un découpage et a_1, a_2, …, a_n le nombre de cases blanches de ces différents rectangles.

2. Prouver que l'aire de chaque rectangle est toujours paire.

3. Justifier que les a_i sont tous différents et que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 32$.

On peut donc supposer que les a_i sont classés, donc que l'on a : $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

4. Prouver que $1 \leq n \leq 7$.

On suppose désormais que $n = 7$.

5. Justifier que $7 \leq a_7 \leq 10$.

6. a. Prouver que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ et $a_3 = 3$.

b. Prouver que le cas $a_7 = 7$ est impossible.

7. Déterminer les valeurs de a_4, a_5, a_6 et a_7 qui sont envisageables et présenter les résultats dans un tableau.

8. Proposer pour tous les cas possibles un découpage et répondre au problème posé.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Exercice numéro 3

(proposé par le jury académique)

Exponentiation rapide

On s'intéresse dans cet exercice au calcul de a^n, où a est un nombre réel et n un entier naturel non nul.

On rappelle que $a^n = a \times a \times a ... \times a$ avec n facteurs.

1. Combien de multiplications sont *a priori* nécessaires pour calculer a^n ?

2. Proposer un algorithme qui permette de calculer a^n. On souhaite maintenant optimiser le calcul de a^n c'est-à-dire calculer a^n avec le moins de multiplications possibles. Ainsi par exemple, pour calculer a^4, on peut calculer $b = a \times a$ (une multiplication) puis $a^4 = b \times b$ (une multiplication). On calcule de cette façon a^4 avec deux multiplications seulement.

3. a. Montrer que l'on peut calculer a^8 avec trois multiplications seulement.

b. Montrer que l'on peut calculer a^{10} avec quatre multiplications seulement et de deux façons différentes.

4. On propose l'algorithme suivant pour effectuer le calcul de a^n :

```
R prend la valeur 1
N prend la valeur n
A prend la valeur a
Tant que (N > 0 ) faire
    Si (N est impair) Alors
        R prend la valeur R × A
    Fin Si
    N prend la valeur égale au quotient de la division euclidienne de N par 2
    A prend la valeur A × A
Fin Tant que
Afficher R
```

a. On programme l'algorithme ci-dessus et on l'exécute pour le calcul de 3^{12} ($a = 3$, $n = 12$). Recopier et compléter le tableau d'évolution des variables ci-dessous :

	R	N	A
Initialisations	1	12	3
1^re^ étape	1	6	9
2^e^ étape			
...	...	...	...

b. Calculer pour chaque ligne du tableau la quantité $A^N \times R$. Qu'observe-t-on ? Cette quantité est l'invariant de la boucle ; il permet de montrer dans le cas général que cet algorithme effectue bien le calcul de a^n.

c. Combien de multiplications ont été effectuées pour le calcul de 3^{12} par cet algorithme ?

d. Combien de multiplications seraient effectuées pour le calcul de a^{2015} par cet algorithme ?

Exercice numéro 4

(proposé par le jury académique)

Comptage des réserves dans les fosses à « ma »

Les fosses collectives découvertes aux îles de la Société ou encore aux Marquises (appelées *ua ma* dans cet archipel), servaient notamment à la conservation de la pâte fermentée du fruit de l'arbre à pain. Elles assuraient ainsi un approvisionnement constant, notamment en période de disette. Chaque famille, en dehors des énormes fosses communautaires gérées par le chef, possédait au moins une fosse à *ma* (*ma* : nom de la pâte fermentée du fruit de l'arbre à pain conservée dans ce milieu anaérobie, consommable même après un demi-siècle d'enfouissement). La quantité de fruits de l'arbre à pain stockés dans ces fosses était comptabilisée par « paquets de 5 », formant un système de numération en base 5. Les peuples *Api* (Nouvelles Hébrides) comptaient aussi en base 5. Et on trouve des traces de l'utilisation de cette base chez les peuples Peul (Afrique), Khmer (Asie), Guarani (Amérique du Sud)...

Nous n'avons plus de trace de ce système, mais nous allons imaginer que les cinq chiffres utilisés étaient, dans l'ordre croissant, de zéro à quatre : A, H, P, T et M (comme *Aore*, *Ho'e*, *Piti*, *Toru* et *Maha*.) Nous appellerons une « cinquaine », un paquet de cinq.
Ainsi le nombre PMT signifie 3(T) unités + 4(M) cinquaines + 2(P) cinquaines de cinquaines, soit :
$3 + 4\times5 + 2\times5^2 = 73$

1. Quel nombre s'écrit THAM dans ce système ?
2. Comment s'écrit 2015 dans ce système ?
3. Combien de lettres sont-elles nécessaires pour écrire le nombre un million dans ce système ?
4. Recopier et compléter les tables d'addition et de multiplication :
   Exemple : H+P = T et H×P = P ; M+T = HP et M×T = PP

Addition	A	H	P	T	M
A					
H			T		
P					
T					
M				HP	

Multiplication	A	H	P	T	M
A					
H			P		
P					
T					
M				PP	

5. Utilisez ces deux tables pour compléter l'opération posée, sans oublier les retenues :

	H	T	T
x		P	P
	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

6. Teva dit que ce système a un côté pratique car il permet de compter sur ses doigts jusqu'à 30.
   Explique comment s'y prend Teva.